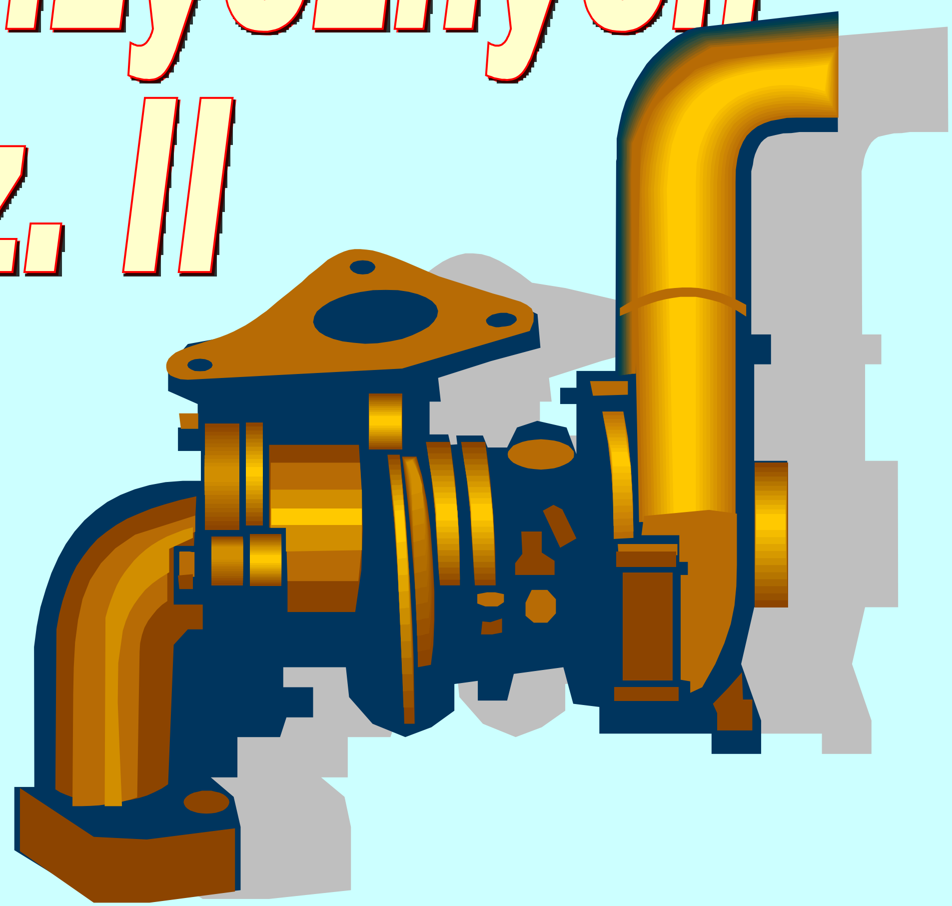
Modelowanie wybranych zjawisk fizycznych cz. II

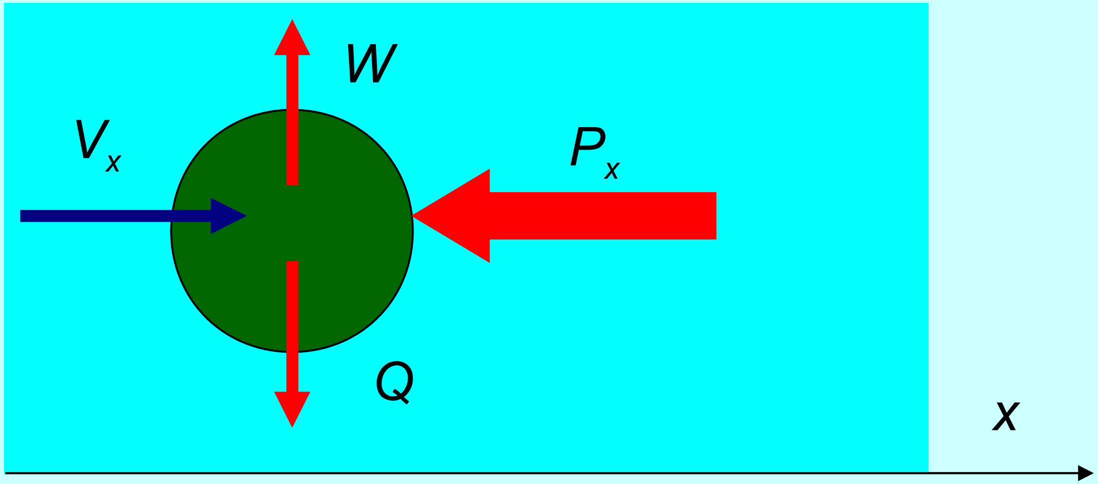


Ryszard Myhan

Modelowanie wybranych zjawisk fizycznych

Opływ ciała przez płyn

- Gdy istnieje wzajemny ruch ciała i otaczającego płynu, wówczas oprócz sił wyporu (skierowanych przeciwnie do wektora przyspieszenia ziemskiego), powstaje siła oporu aerodynamicznego $\boldsymbol{P_x}$ (skierowana przeciwnie do kierunku prędkości opływu $\boldsymbol{V_x}$ w kierunku $\boldsymbol{x}$).



Opływ ciała przez płyn

- Do modelowania tej siły stosowany jest wzór półempiryczny:

$$P_x = -c_x \cdot F_x \cdot \frac{\rho \cdot v_x^2}{2}$$

gdzie:

c_x - jest współczynnikiem doskonałości profilu, zależnym od liczby Reynoldsa;

F_x - jest polem powierzchni rzutu profilu opływanego ciała na rzutnię prostopadłą do kierunku x;

ρ - gęstość;

v_x - składowa prędkości w kierunku x.

Opływ ciała przez płyn

- Po linearyzacji wzór ten przyjmie postać:

$$P_x = k \cdot v_x = \frac{\partial P_x}{\partial v_x} \cdot v_x$$

gdzie:

k - jest stałą o wartości średniej:

$$k = \frac{\partial P_x}{\partial v_x} = -F_x \cdot c_x \cdot v_x$$

Opływ ciała przez płyn

- Dla małych prędkości przepływu (gdy przepływ jest laminarny), a zatem dla małych wartości liczby Reynoldsa, można przyjąć że siła oporu jest proporcjonalna do prędkości:

$$P_x = -c_x \cdot F_x \cdot \frac{\rho \cdot v_x^2}{2} \cong k \cdot F_x \cdot \rho \cdot v_x$$

gdzie:

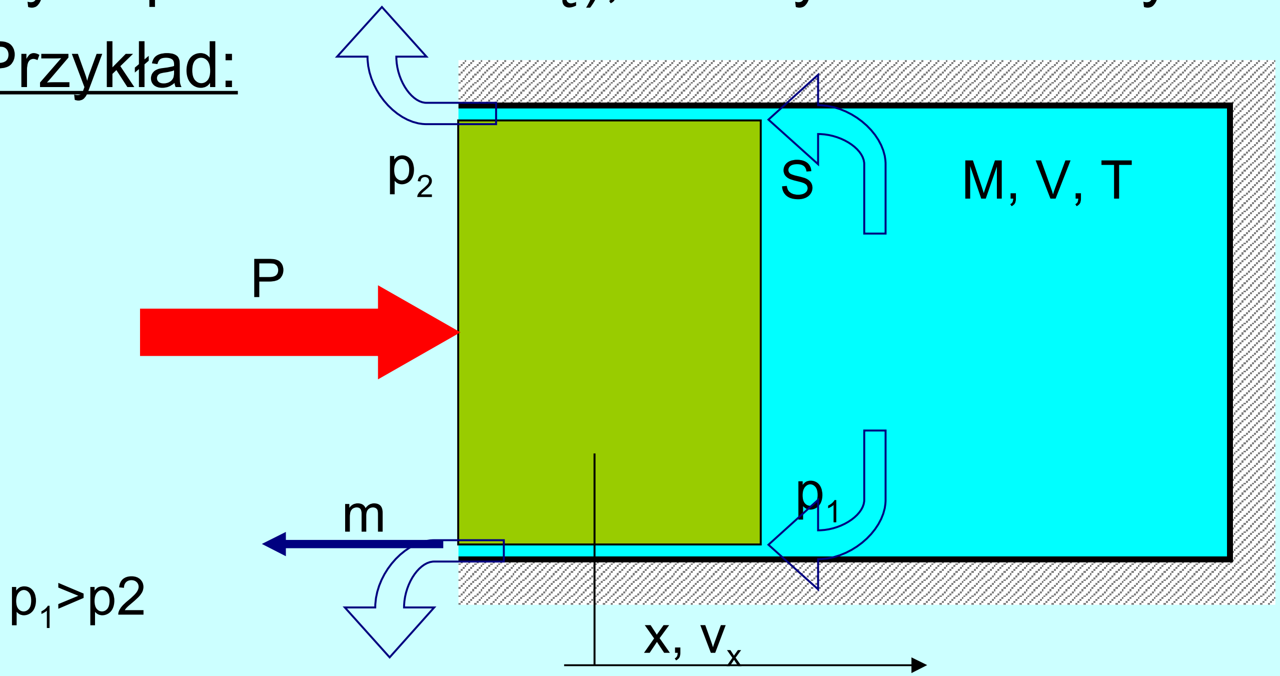
k - jest pewną stałą empiryczną.

Modelowanie wybranych zjawisk fizycznych

Wypływ płynu przez szczelinę

- Jeżeli opływająca struga jest ograniczona ścianką (jak w przypadku tłoka w cylindrze, gdy uwzględnimy przepływ płynu przez szczelinę), należy zalecić inny model.

Przykład:



Wypływ płynu przez szczelinę

- Przy założeniu ruchu ustalonego (v_x=const.) i braku tarcia suchego w szczelinie, model ten może być przedstawiony w postaci czterech równań:

1. Siła P oddziaływująca na tłok:

$$P = \left(p_1 - p_2\right) \cdot S$$

gdzie:

p_1 i p_2 - to ciśnienia po obu stronach tłoka;

S - pole powierzchni tłoka.

2. Strumień masy m jest funkcją spadku ciśnienia (p_1-p_2) wzdłuż szczeliny:

$$m = f\left(p_1 - p_2\right)$$

Wypływ płynu przez szczelinę

3. Funkcja z p.2 zależy od rodzaju przepływu:

$$m = \frac{dM}{dt} = \frac{d\left(\dfrac{p_1 \cdot V}{R \cdot T}\right)}{dt}$$

4. Funkcja z p.2 zależy od kształtu szczeliny:

$$V(t) = S \cdot x \qquad czyli \qquad \frac{dV}{dt} = S \cdot \dot{x}$$

- Z tych równań można wyznaczyć szukaną zależność siły od prędkości

$$P = P(\dot{x})$$

Modelowanie wybranych zjawisk fizycznych

Łączenie strumieni i mieszanie

- W procesach przetwórczych, w ogrzewnictwie itp. występują często procesy mieszania cieczy, gazów i materiałów sypkich. Procesy te realizuje się w zbiornikach (mieszalnikach) lub przez zmieszanie w strudze (np. rurze lub otwartej strudze).
- Nawet jeśli pominąć procesy wymiany energi, to w stanach nieustalonych można wyróżnić dwa zjawiska:
  - ⇨ dochodzenie do ustalonej wartości ilości składników w całej rozpatrywanej objętości;
  - ⇨ ujednorodnienie rozkładu w całej rozpatrywanej objętości, czyli właściwe mieszanie.

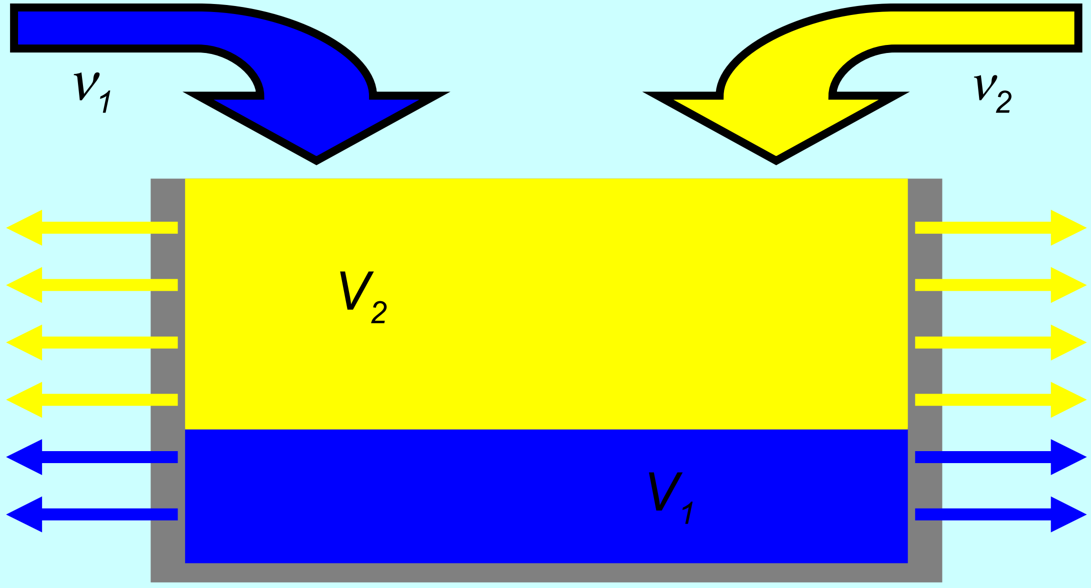
Łączenie strumieni

PRZYKŁAD 1 (przypadek wyidealizowany):

- Do zbiornika o porowatych ściankach, doprowadzono dwa strumienie niemieszających się cieczy, np.:
  - strumień wody o objętościowej wydajności v_1,
  - strumień oleju o objętościowej wydajności v_2.
- Scenariusz łączenia strumieni wygląda następująco:
  - w stanie początkowym zbiornik jest wypełniony w całości olejem;
  - w chwili $t=0$ otwierane są oba zawory, w związku z czym powierzchnia podziału obu cieczy zacznie przesuwać się od dna ku górze;

Łączenie strumieni

- przyjęto założenie, że suma objętości obu cieczy jest stała ($V(t)=V_1(t)+V_2(t)=const.$);
- nadmiar obu cieczy wydostaje się na zewnątrz przez ścianki, odpowiednio do chwilowej wartości stosunku ich objętości $r=V_1/V_2$.



Łączenie strumieni

? Jaki jest przebieg *r(t)* i po jakim czasie stosunek ten przyjmie wartość ustaloną.

MODEL MATEMATYCZNY

$$\frac{dV_1}{dt} = v_1 - k \cdot V_1 \qquad (1)$$

$$\frac{dV_2}{dt} = v_2 - k \cdot V_2 \qquad (2)$$

$$V_1 + V_2 = V(t) = const \qquad (3)$$

gdzie *k* jest współczynnikiem wypływu przez pory ścianek

Łączenie strumieni

Równanie (3) układu, po zróżniczkowaniu przyjmie postać:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV_1}{dt} + \frac{dV_2}{dt} = 0$$

Następnie dodając stronami równania (1) i (2)

$$v_1 + v_2 - k \cdot (V_1 + V_2) = 0 \rightarrow \quad k = \frac{v_1 + v_2}{V}$$

Ostatecznie uzyskano dwa równania różniczkowe:

$$\frac{dV_1}{dt} = -\frac{v_1 + v_2}{V} \cdot V_1 + v_1$$

$$\frac{dV_2}{dt} = -\frac{v_1 + v_2}{V} \cdot V_2 + v_2$$

Łączenie strumieni

ROZWIĄZANIE 1:

- Przy założeniu, że *$v_1(t)=const$* oraz *$v_2(t)=const$* rozwiązanie przy warunku początkowym *$V_1(t=0)=0$*;

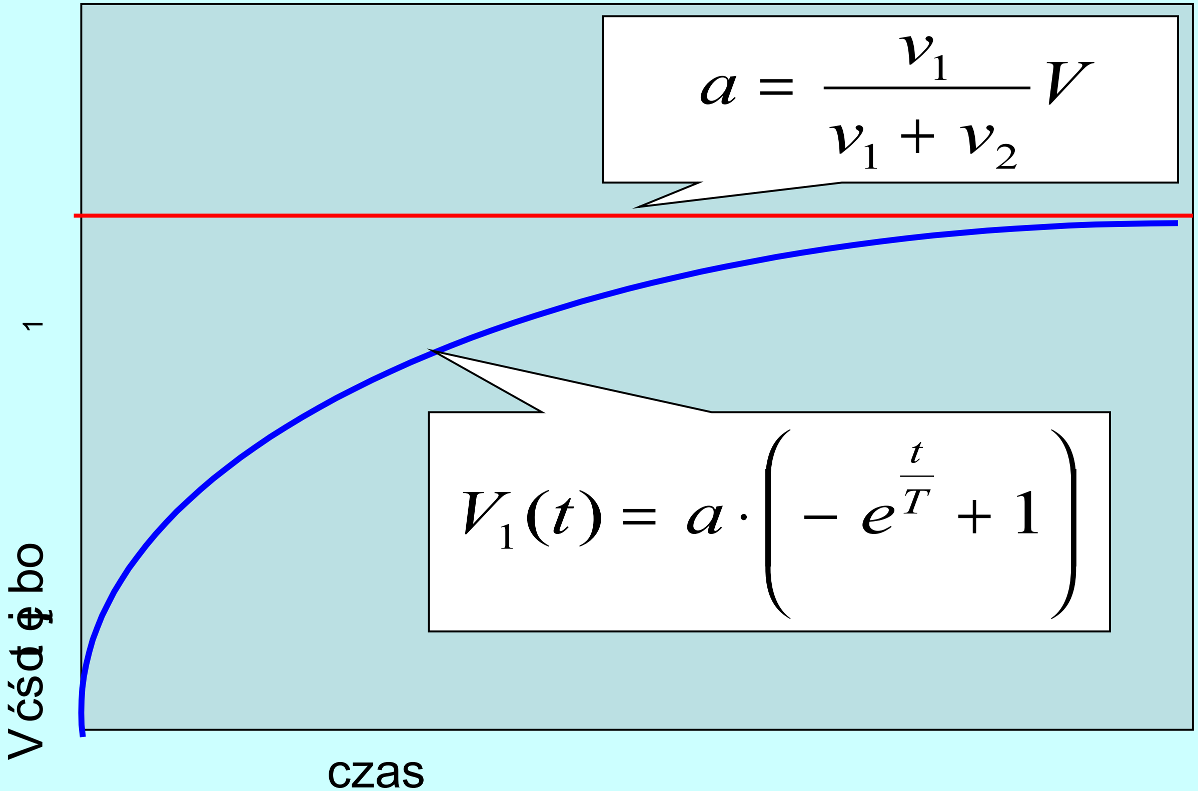
$$V_1(t) = a \cdot \left(- e^{\frac{t}{T}} + 1 \right)$$

$$gdzie \;\; T = \frac{V}{v_1 + v_2}; \; a = \frac{v_1}{v_1 + v_2} V$$

Łączenie strumieni

ROZWIĄZANIE 1:

- Interpretacja graficzna



Łączenie strumieni

ROZWIĄZANIE 2:

- Przy założeniu, że $v_1(t)=const$ oraz $v_2(t)=const$ rozwiązanie przy warunku początkowym $V_2(t=0)=0$;

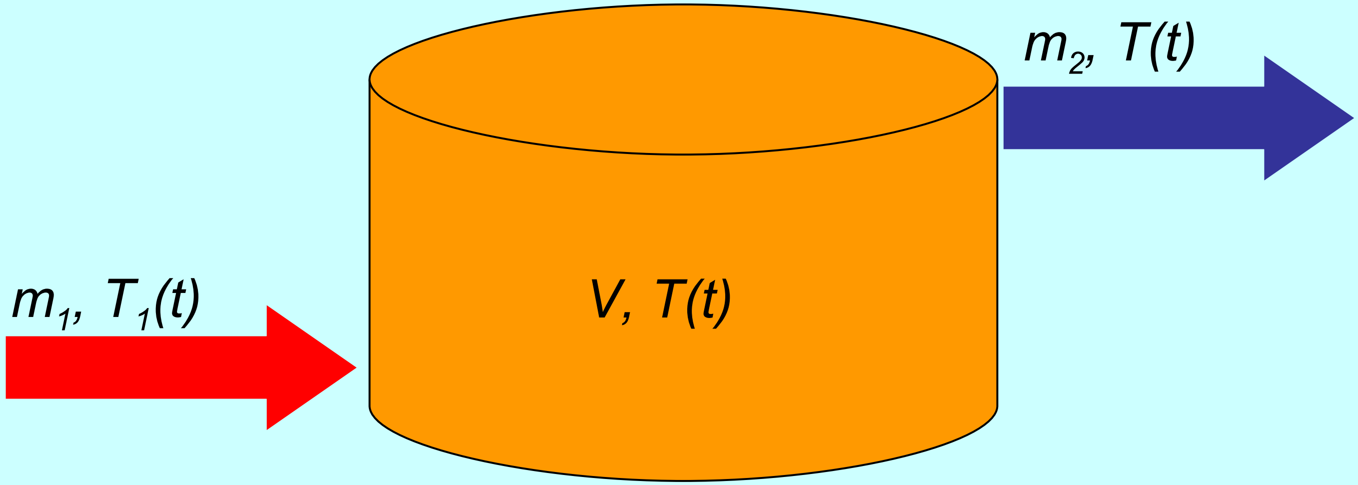
$$V_2(t) = b \cdot \left(-e^{\frac{t}{T}} + 1 \right)$$

$$gdzie\ \ T = \frac{V}{v_1 + v_2};\ b = \frac{v_2}{v_1 + v_2} V$$

Łączenie strumieni

PRZYKŁAD 2:

- Do pomieszczenia o objętości V wypełnionego zimnym powietrzem nadmuchiwany jest strumień m_1 ciepłego powietrza o temperaturze $T_1(t)$.
- Należy znaleźć średnią wartość temperatury $T(t)$ powietrza w pomieszczeniu.



Łączenie strumieni

PRZYYKŁAD 2:

Założenia i uproszczenia

1. Ponieważ interesuje nas tylko uśredniona wartość temperatury w całej objętości ***V***, można pominąć zjawiska mieszania spowodowane konwekcją, unoszeniem, przewodzeniem itp.
2. Ciśnienie powietrza wewnątrz pomieszczenia nie zmienia się $p(t)=const$, co oznacza, że przez kanały wentylacyjne i nieszczelności z pomieszczenia wypływa strumień powietrza $m_2=m_1=m$.

Łączenie strumieni

PRZYKŁAD 2:

- Z bilansu energii cieplnej dla pomieszczenia wynika:

$$\frac{d}{dt}\left(G \cdot c \cdot T\right) = m_1 \cdot c \cdot T_1 - m_2 \cdot c \cdot T$$

gdzie: ***G*** - jest masą gazu, ***c*** – jest ciepłem właściwym

- Ponieważ z przyjętego założenia o stałej objętości pomieszczenia i stałym ciśnieniu wynika, że:

$$G(t) = const$$

$$\rightarrow \qquad G\frac{dT}{dt} = m_1 \cdot T_1 - m_2 \cdot T$$

Modelowanie wybranych zjawisk fizycznych

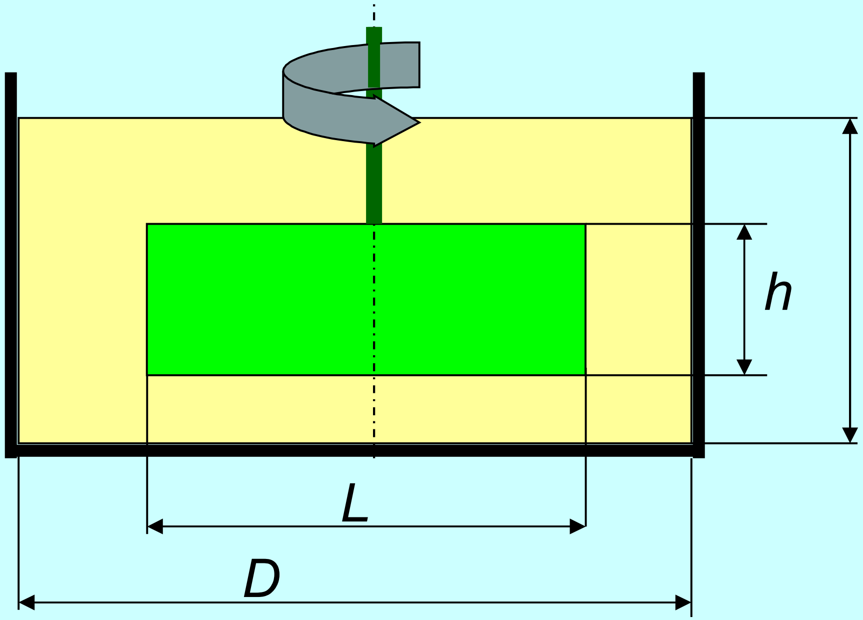
Mieszanie

- Jest to dynamiczny proces doprowadzania mieszaniny do stanu idealnego zmieszania, takiego, kiedy stosunki ilościowe (wagowe lub objętościowe) w najmniejszej części rozpatrywanej objętości są jednakowe w całej rozpatrywanej objętości i równe wartościom średnim.
- Proces zależy od intensywności ruchów mieszanych ciał, a więc od mieszadeł, konwekcji, wibracji ścianek itp.
- W związku z tym nie można zaproponować żadnych ogólnych elementów opisu matematycznego.

Mieszanie

PRZYKŁAD [Radomski, 1985r] **:**

- Przykład dotyczy dynamiki procesu mieszania cieczy w pionowym, walcowym zbiorniku o średnicy *D* i wysokości *H* za pomocą mieszadła łopatowego o średnicy *L* i wysokości *h*.



Mieszanie

- Dla przedstawionego układu, autor proponuje następujący model:

$$\eta = 100 \cdot \left(1 - e^{-k \cdot t}\right)$$

gdzie:

η - jest stopniem zmieszania (w procentach);

k - jest współczynnikiem intensywności mieszania;

t - to czas mieszania.

- Jest to rozwiązanie liniowego równania różniczkowego postaci:

$$\frac{d\eta}{dt} = k \cdot \left(100 \cdot 1(t) - \eta(t)\right)$$

Mieszanie

- Dla mieszadeł przemysłowych łopatowych, turbinowych i śmigłowych współczynnik intensywności k leży w przedziale 0,07 do 0,3 s-1 i można go obliczyć ze wzoru:

$$k = c \cdot \left(\frac{L^2 \cdot h}{D^2 \cdot H} \right)^a \cdot Re^b$$

gdzie: *c* zależy od typu mieszadła, *a* i *b* są stałymi eksperymentalnymi, *L* jest średnicą zewnętrzną mieszadła, *h* jest jego grubością, *D* i *H* są odpowiednio średnicą i wysokością walcowego zbiornika mieszadła, Re jest liczbą Reynoldsa na obwodzie mieszadła.

Modelowanie wybranych zjawisk fizycznych

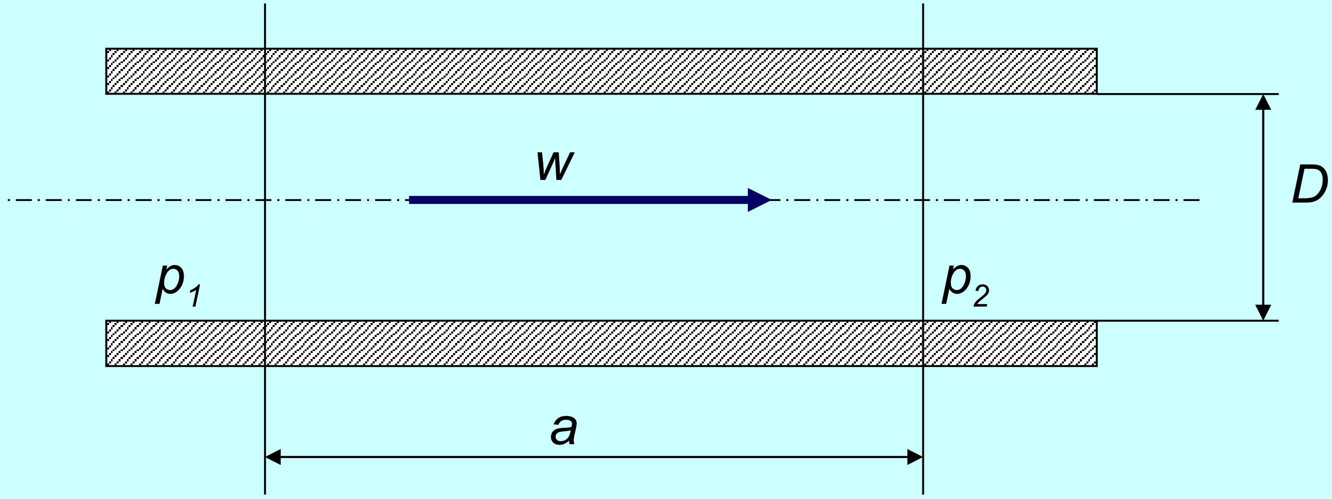
Przepływ płynów

- Występuje tu szereg zjawisk elementarnych, np. ściśliwość płynu, odkształcalność naczyń, tarcie płynu o ścianki, tarcie wewnętrzne, kawitacja itp.
- Dla każdego z tych zjawisk tworzone są coraz lepsze modele matematyczne, opisywane w podręcznikach mechaniki, hydromechaniki i termodynamiki.
- Mając do zamodelowania konkretny proces, zakłada się które spośród zjawisk elementarnych tworzą ten proces i tak założony system zjawisk elementarnych tworzy model procesu.

Przepływ płynów

Przepływ płynów i związane z tym opory

- Przepływ płynów w przewodzie powoduje straty energii wewnętrznej strugi.
- Miarą tej straty może być iloczyn spadku ciśnienia płynu $\Delta p = p_1 - p_2$ i prędkości w.



Przepływ płynów

Przepływ płynów i związane z tym opory

- Modelowanie przepływu przez opór (miejscowy lub w długim kanale) sprowadza się do ustalenia zależności:

$$\Delta p = f(w) \quad \text{lub} \quad \Delta p = f(m)$$

gdzie:

$$m = S \cdot \rho \cdot w$$

- Niekiedy też stosowane jest pojęcie *oporności hydraulicznej R_H*, definiowanej następująco:

$$R_H = \frac{d(\Delta p)}{dm} \qquad \left[\frac{1}{\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}}\right]$$

Przepływ płynów

Przepływ płynów i związane z tym opory

- Praktycznie stosowane modele są *zależnościami półempirycznymi*, wyprowadzonymi z *równania płynu nielepkiego* (Eulera).
- Całkowanie tego równania przy założeniu nieściśliwości płynu prowadzi do uzyskania *równania Bernoulliego*, z którego wyprowadza się wzór, zwany także *wzorem Bernoulliego*

$$G = S\sqrt{2 \cdot \rho \cdot (p_1 - p_2)}$$

Przepływ płynów

Przepływ płynów i związane z tym opory

- Wzór ten wyraża zależność strumienia masy m płynu przepływającego przez opór od warunków przepływu:
  - ciśnienia przed oporem p_1;
  - ciśnienia za oporem p_2;
  - gęstosci płynu ρ;
  - parametru reprezentującego właściwości przepływowe oporu – jego powierzchni przepływowej S.

Przepływ płynów

Przepływ płynów i związane z tym opory

- Założenie braku lepkości powoduje zbyt dużą niezgodność modelu i przepływu rzeczywistego, wobec czego wprowadza się dodatkowy parametr korygujący tę niezgodność – wyznaczany doświadczalnie współczynnik α, otrzymując zależność stosowaną w praktyce:

$$m = \alpha \cdot S \sqrt{2 \cdot \rho \cdot \Delta p}$$

gdzie: $\alpha = \alpha(\mathrm{Re})$ jest współczynnikiem przewężenia.

Przepływ płynów

Przepływ płynów i związane z tym opory

- Do modelowania przepływu stosuje się też inną postać równania Bernoulliego:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = c \cdot \frac{\rho \cdot w^2}{2}$$

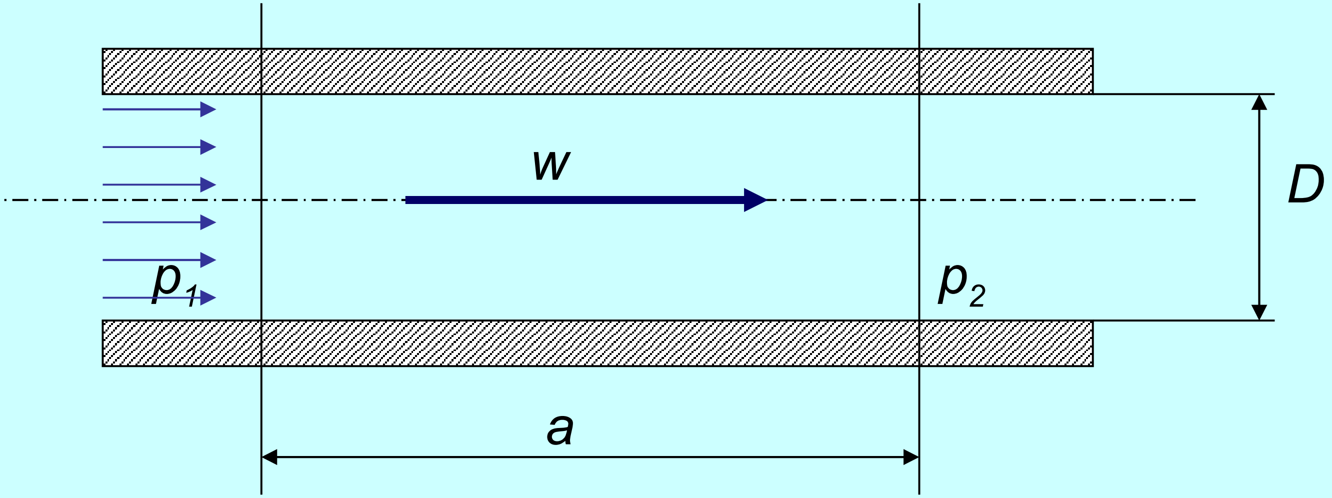
  gdzie c jest współczynnikiem strat, zależnym od rodzaju przepływu, parametrów płynu oraz kształtu i wymiarów kanału lub przewężenia

- Występujące we wzorach empiryczne współczynniki α i c związane są zależnością:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{c}}$$

Modelowanie wybranych zjawisk fizycznych

Przepływ płynów przez kanał



- Jeżeli na odcinku *a* prędkość jest stała *w(a)=const* to do zamodelowania strat energii można zastosować wzór:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = c \cdot \frac{\rho \cdot w^2}{2}$$

Przepływ płynów

Przepływ płynów przez kanał

- W przypadku przepływu przez długi kanał ($D << a$) wartość występującego we wzorze współczynnika c określa się z zależności:

$$c = \lambda \cdot \frac{a}{D}$$

gdzie:

λ - jest współczynnikiem oporu liniowego;

a – jest długością kanału;

D – jest średnicą wewnętrzną kanału.

Przepływ płynów

Przepływ laminarny przez kanał

- Jeżeli liczba Reynoldsa Re<2100, to przy pewnych założeniach co do profilu prędkości w kanale dla cieczy newtonowskiej, można wyprowadzić wzór na współczynnik oporu liniowego λ :

$$\lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}} = \frac{64\upsilon}{w \cdot D}$$

gdzie:

D – jest zastępczą średnicą hydrauliczną, obliczaną ze wzoru:

S – polem przekroju strumienia;

Obw – obwodem zwilżonym.

$$D = 4\frac{S}{Obw}$$

Przepływ płynów

Przepływ laminarny przez kanał

- Po uwzględnieniu powyższych zależności, ostatecznie wzór na opory hydrauliczne w kanale dla przepływu laminarnego przyjmie postać:

$$\Delta p = \frac{64\nu}{w \cdot D} \cdot \frac{a}{D} \cdot \frac{\rho \cdot w^2}{2} = \frac{32\nu \cdot a \cdot \rho}{D^2} \cdot w$$

- lub postać znaną jako **wzór Hagena-Poiseuille'a**:

$$w = \frac{m}{\rho \cdot S} \quad \rightarrow \quad \Delta p = \frac{128 \cdot \nu \cdot a}{\pi \cdot D^4} \cdot m$$

Przepływ płynów

Przepływ laminarny przez kanał

- Oporność hydrauliczna przy przepływie laminarnym wyniesie:

$$R_H = \frac{128 \cdot \nu \cdot a}{\pi \cdot D^4}$$

- Zatem w ruch laminarnym oporność hydrauliczna jest stała w tym sensie, że nie zależy od prędkości przepływu.

Przepływ płynów

Przepływ burzliwy przez kanał

- Można przyjąć, że jeśli liczba Reynoldsa > 2100 to przepływ na całej długości kanału jest turbulentny.
- W takim przypadku do określenia oporu hydraulicznego wykorzystywana jest ta sama zależność, zmienia się jedynie sposób wyznaczenia współczynnika oporów λ.
- Współczynnik λ wyznaczany jest empirycznie, przedziałami, zależnie od zmieniającej się wartości liczby Reynoldsa.

Przepływ płynów

Przepływ burzliwy przez kanał

- Przykładowo dla ***Re ∈ [3·10³ ÷ 5·10⁴]*** :

$$\lambda = 0.3164 \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{Re}} = 0.3164 \cdot \sqrt[4]{\frac{\nu}{w \cdot D}}$$

  zależność ta znana jest jako **wzór Blasiusa**

- Dla przepływu burzliwego oporność hydrauliczna nie jest stała:

$$R_H = \frac{d(\Delta p)}{dm} = \frac{16 \cdot \lambda \cdot a}{\pi^2 \cdot D^5 \cdot \rho} \cdot m$$

  gdzie λ i m są zmienne.

Modelowanie wybranych zjawisk fizycznych

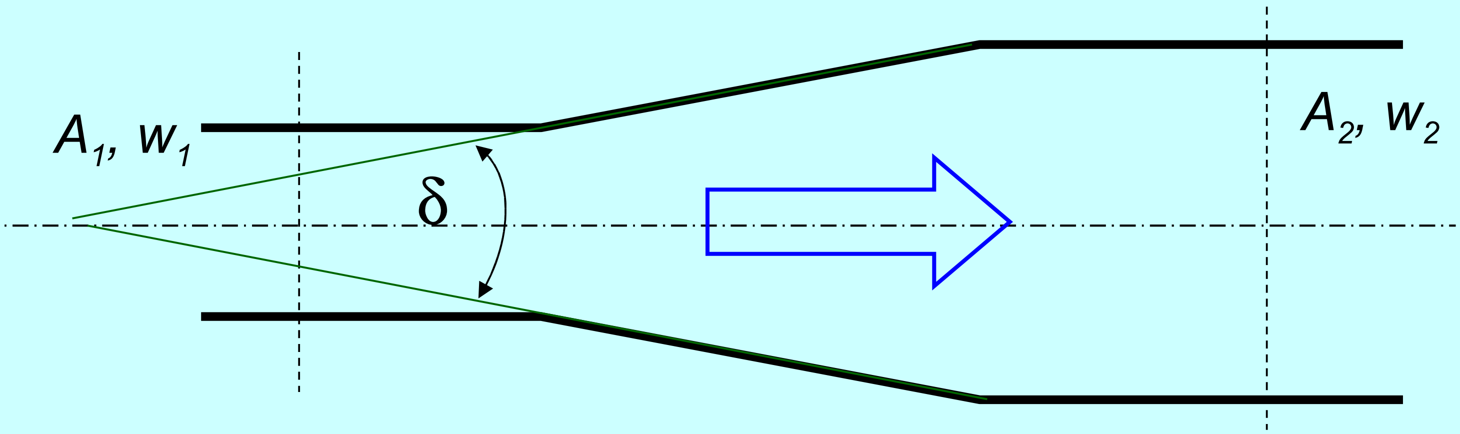
Przepływ przez opory miejscowe

- Przyjmuje się, że w miejscach nagłych zmian geometrii kanału (wlot i wylot do zbiornika, zmiany przekroju, kolana, zawory itp.) oraz w pewnej odległości za nimi przepływ jest turbulentny, nawet dla małych wartości liczby Reynoldsa.
- Występujący w ogólnym równaniu współczynnik *c* jest uzależniony od liczby Reynoldsa oraz od konstrukcji (kształtów i wymiarów) przewężenia i odniesiony do średniej prędkości
płynu za przeszkodą.

$$\Delta p = c \cdot \frac{\rho \cdot w^2}{2}$$

Przepływ przez opory miejscowe

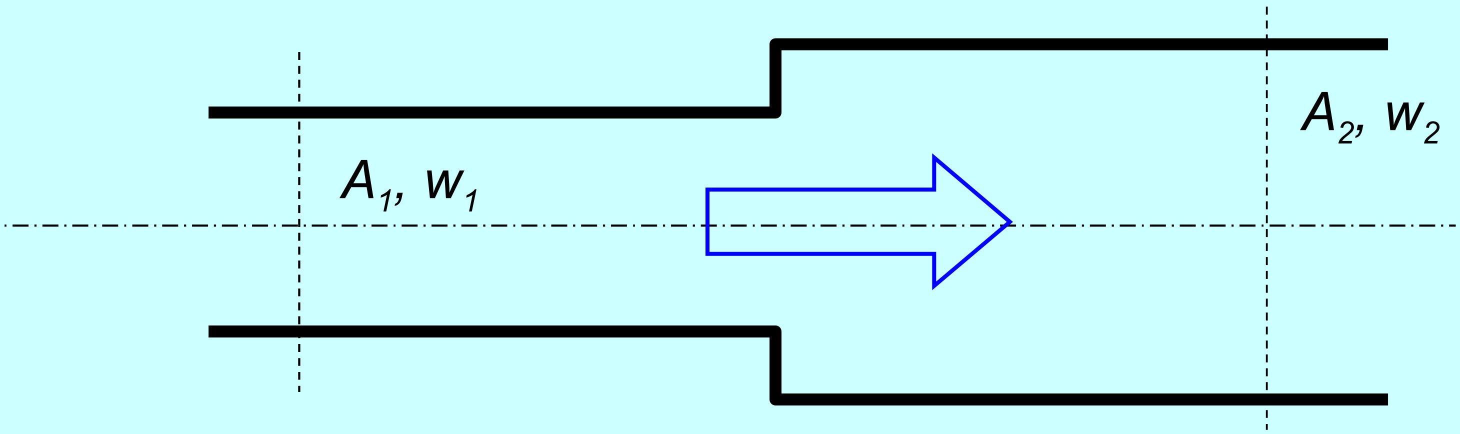
Straty hydrauliczne przy łagodnym zwiększaniu przekroju



$$\Delta h_m = \frac{(w_1 - w_2)^2}{2 \cdot g} \cdot \sin(\delta)$$

Przepływ przez opory miejscowe

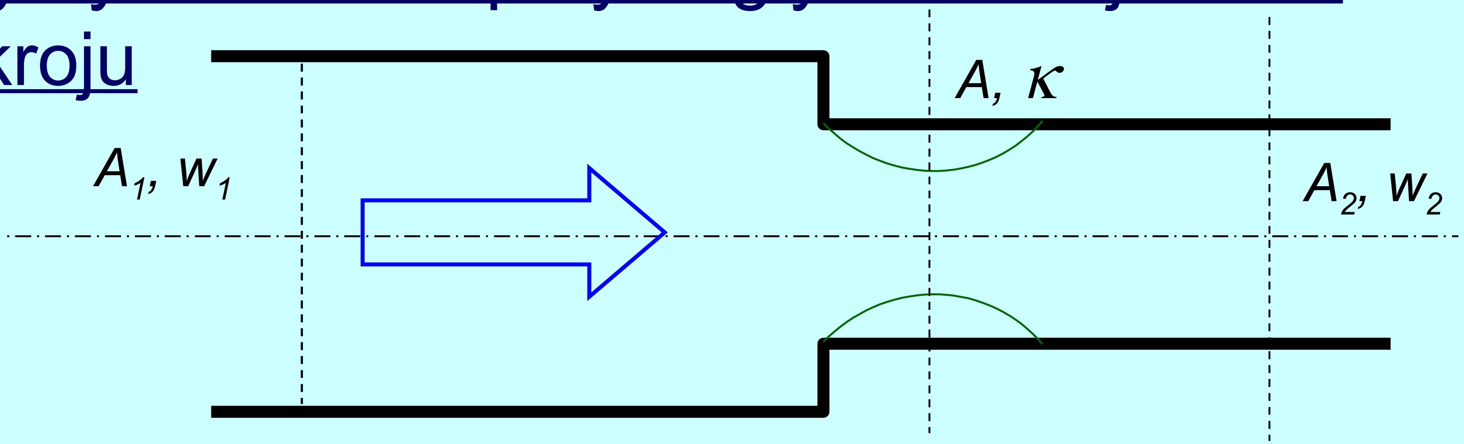
Straty hydrauliczne przy nagłym zwiększaniu przekroju



$$\Delta h_m = \frac{(w_1 - w_2)^2}{2 \cdot g}$$

Przepływ przez opory miejscowe

Straty hydrauliczne przy nagłym zmniejszaniu przekroju

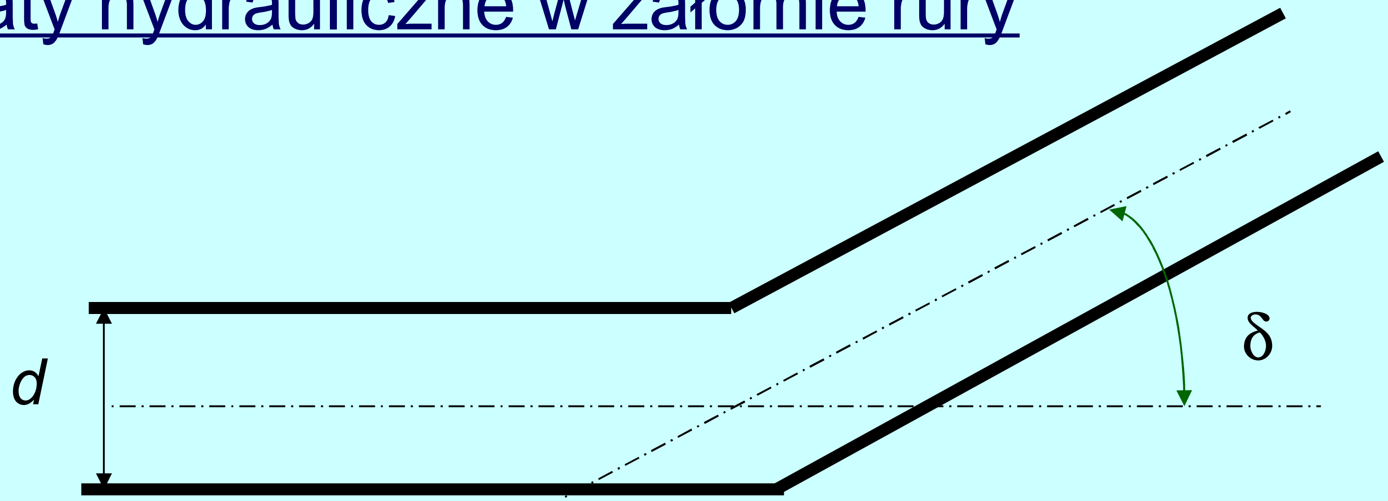


$$\Delta h_m = \zeta \cdot \frac{w_2^{\,2}}{2 \cdot g} \qquad \zeta = 0{,}04 + \left(\frac{1}{\kappa} + 1 \right)^2$$

κ = (0,62 – 0,64)	dla ostrych krawędzi przejścia
κ = (0,70 – 0,90)	dla lekko zaokrąglonych krawędzi
κ = 0,99	dla łagodnych i silnie zaokrąglonych

Przepływ przez opory miejscowe

Straty hydrauliczne w załomie rury

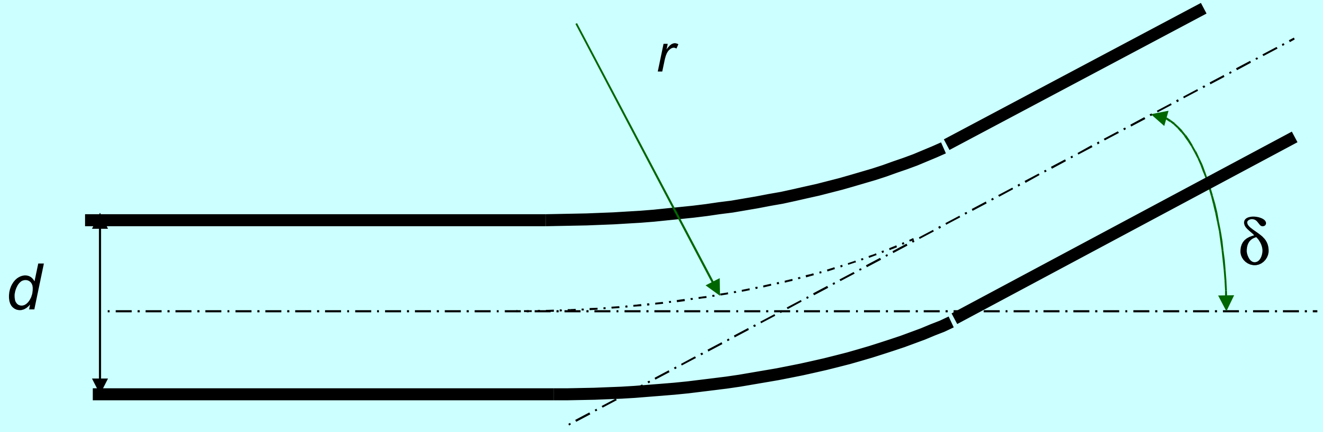


$$\zeta = sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) + sin^4\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

δ	20	40	60	80	90	100	110	120
ζ	0,04	0,14	0,36	0,74	0,98	1,26	1,56	1,86

Przepływ przez opory miejscowe

Straty hydrauliczne w zakrzywieniu rury



$$\zeta = \left[0,13 + 0,163 \cdot \left(\frac{d}{r} \right)^{3,5} \right] \cdot \frac{\delta}{90^\circ}$$

Przepływ przez opory miejscowe

Straty hydrauliczne w zaworach

- Straty te są zależne od konstrukcji zaworu i stopnia jego otwarcia.
- Literatura podaje przeważnie „gotową” (wyznaczoną doświadczalnie) wartość współczynnika oporu miejscowego (dla pełnego otwarcia zaworu.
- Szacunkowe wartości tego współczynnika, w zależności od konstrukcji zaworu wynoszą:
  – dla zaworów grzybkowych prostych ζ =3,9
  – dla zaworów skośnych przelotowych ζ =2,5
  – dla zaworów skośnych pełnoprzelotowych ζ =0,6

Przepływ przez opory miejscowe

Straty hydrauliczne w zaworach

- Dla zaworów regulacyjnych często używany jest tzw. *współczynnik wymiarowy zaworu* k_v

$$v = k_v \cdot \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}}$$

gdzie
v - jest objętościowym natężeniem przepływu;
Δp – spadkiem ciśnienia na zaworze.

- Współczynnik k_v jest z reguły podawany przez producenta zaworu.

Przepływ przez opory miejscowe

Straty hydrauliczne w typowych elementach armatury hydraulicznej

- Dla większości typowych elementów armatury hydraulicznej miejscowe opory przepływu wyznaczane są doświadczalnie i podawane w zależności od średnicy nominalnej.
- Podaje się jednak nie wartości współczynnika oporu miejscowego, lecz tzw. ***długość zastępcza***, odnosząc wartość oporów miejscowych do wartości oporu przepływu w prostym odcinku rurociągu o takiej samej średnicy jak średnica nominalna elementu i długości „*lz*” równej długości zastępczej.

Przepływ przez opory miejscowe

Straty hydrauliczne w typowych elementach armatury hydraulicznej

$$\Delta h_m = \lambda \cdot \frac{l_z \cdot v^2}{2 \cdot d \cdot g}$$

Przykładowe długości zastępcze l_z [m] dla wybranych elementów armatury hydraulicznej w zależności od średnicy zewnętrznej rury d[mm] dla grubości ścianki g=2 [mm] i g=5 [mm]

lp	Nazwa elementu	38	38	45	45	57	57	76	76	89	89	108	108
1	Zasuwa	0,3	02	0,4	0,3	0,5	0,4	0,8	0,6	1,0	0,8	1,3	1,0
2	Zawór klapowy	2,9	2,2	3,7	2,8	5,2	4,1	8,1	6,2	10,0	7,6	14,9	9,3
3	Kolano gł. r/d=3	1,6	1,2	2,0	1,6	2,8	2,4	4,4	3,2	5,2	4,0	6,4	5,2
4	Zwężka 10 D/d=2	1,5	1,1	1,9	1,4	2,7	2,0	4,1	3,1	5,0	3,8	6,4	5,0
5	Dyfuzor 20 D/d=2	3,5	2,6	4,5	3,4	6,5	4,9	9,8	7,5	12,0	9,2	15,0	12,1

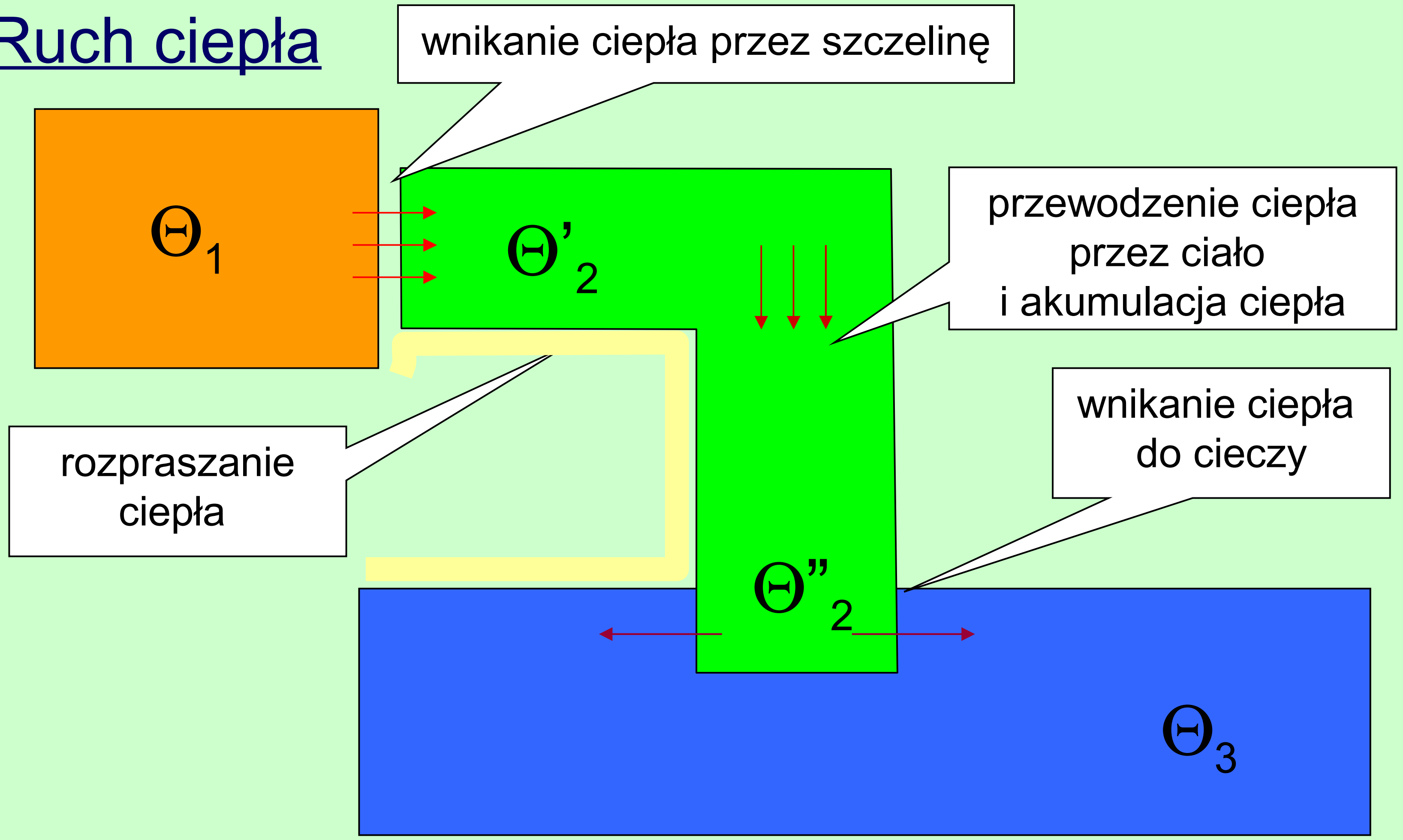
Modelowanie wybranych zjawisk fizycznych

Ruch ciepła

- Przepływ ciepła jest złożonym procesem: dla celów badawczych (analizy, modelowania matematycznego itd.) wyróżnia się w tym procesie szereg zjawisk podstawowych (elementarnych).
- W procesach przepływu ciepła wyróżnia się zjawiska:
  - przewodzenia ciepła wewnątrz ciała;
  - wnikania ciepła między płynem i ciałem stałym (konwekcja);
  - akumulacja ciepła w płynie lub ciele stałym;
  - promieniowanie ciepła.

Modelowanie wybranych zjawisk fizycznych

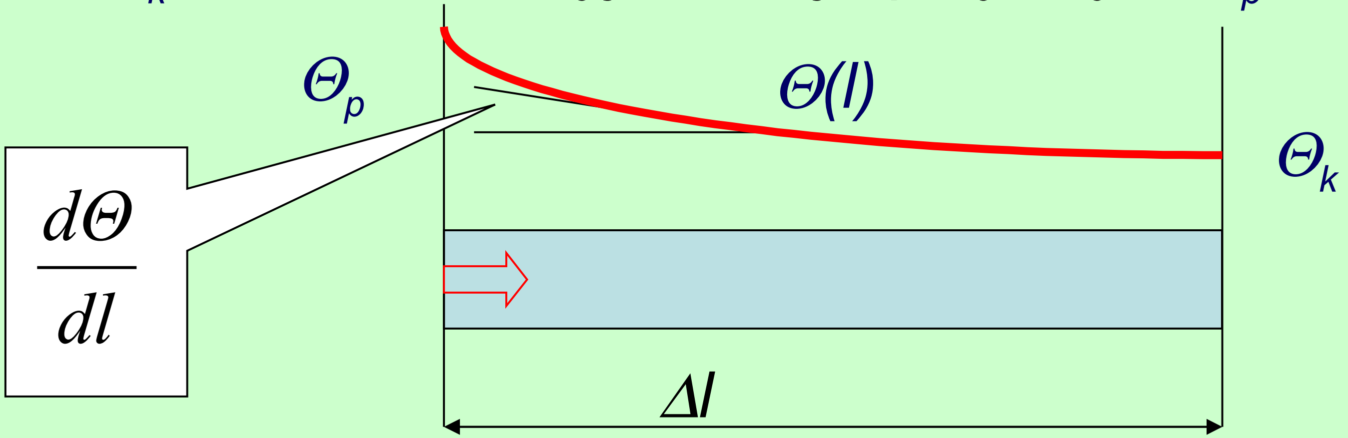
Ruch ciepła



Ruch ciepła

Przewodzenie ciepła

- Przeanalizujmy zjawisko przepływu ciepła w dowolnie małym wycinku ciała stałego lub nieruchomego płynu.
- Rozpatrzmy proces ruchu ciepła tylko wzdłuż osi l.
- Zakładając, że ruch ten jest wywołany różnicą temperatury Θ_p na ściance „wejściowej” i temperatury Θ_k na ściance „wyjściowej”, przy czym $\Theta_p > \Theta_k$.



Ruch ciepła

Przewodzenie ciepła

- Zjawisko przewodzenia ciepła przez izotropowe ciało w kierunku *l* opisywane jest **równaniem Fouriera**.

$$q = -\lambda \cdot S \cdot \frac{d\Theta}{dl}$$

Gdzie: $\frac{d\Theta}{dl}$ - jest gradientem temperatury w kierunku *l*;

λ - jest współczynnikiem przewodzenia ciepła;

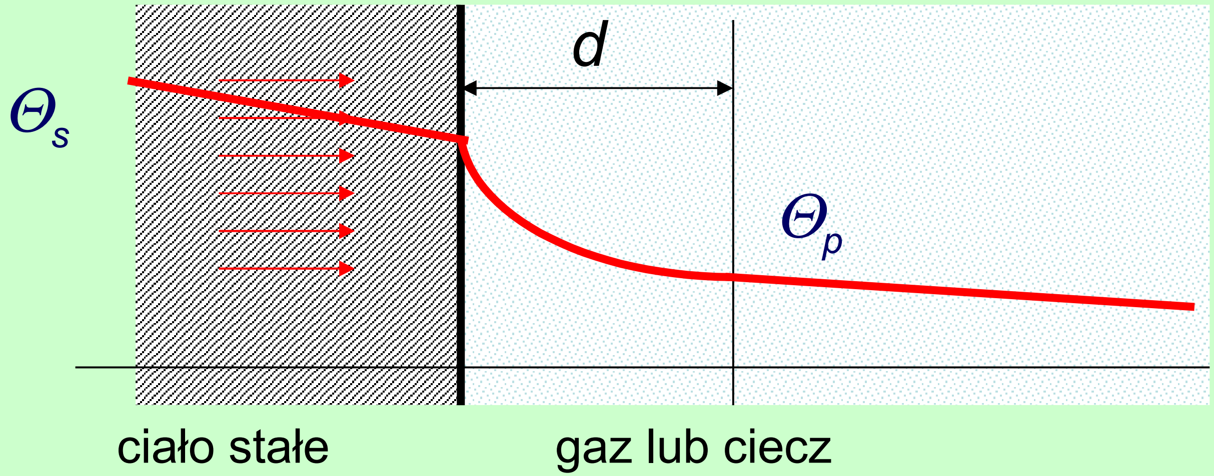
S - jest powierzchnią przewodzenia ciepła.

- Strumień i gradient są wielkościami wektorowymi, znak „minusa" w równaniu wskazuje jedynie, że mają one przeciwne kierunki.

Ruch ciepła

Wnikanie ciepła (konwekcja)

- Rozpatrując proces przepływu ciepła w cienkiej warstwie płynu przylegającej do ścianki, zwanej warstwą przyścienną, obserwuje się znaczne zaburzenia ruchu płynu wywołane przepływem ciepła.
- Zjawisko to nazywa się konwekcją.



Ruch ciepła

Wnikanie ciepła (konwekcja)

- Zjawiska może być opisywane wzorem Fouriera.
- Jednak na ogół nie jest znana ani grubość warstwy przyściennej *d*, ani rozkład temperatur w tej warstwie.
- Dlatego też używa się półempirycznego wzoru uśredniającego, znanego pod nazwą **wzoru Newtona**

$$q = \alpha \cdot S \cdot \left(\Theta_s - \Theta_p \right)$$

gdzie: $\alpha = \frac{\lambda_c}{d}$ - jest zastępczym współczynnikiem wnikania ciepła.

Ruch ciepła

Wnikanie ciepła (konwekcja)

- Współczynnik wnikania ciepła $\boldsymbol{\alpha}$ zależy od wielu czynników. Obliczeniowo można go wyznaczyć z **liczby Nusselta**:

$$Nu = \frac{\alpha \cdot b}{\lambda}$$

gdzie:

b – jest linowym wymiarem charakterystycznym dla danej geometrii obiektu.

Ruch ciepła

Wnikanie ciepła (konwekcja)

- Dla przepływu wymuszonego istnieje związek między liczbami **Nusselta**, **Prandtla** i **Reynoldsa**:

$$Nu = c \cdot \mathrm{Re}^{k} \cdot \mathrm{Pr}^{n}$$

- Przykładowo dla przepływu wewnątrz rur gazów i cieczy o małej lepkości związek ten jest następujący:

$$Nu = 0{,}023 \cdot \mathrm{Re}^{0,8} \cdot \mathrm{Pr}^{0,4}$$

- Liczba Prandtla:

  gdzie η to lepkość dynamiczna płynu.

$$\mathrm{Pr} = \frac{c \cdot \eta}{\lambda}$$

- Dla powietrza ***Pr=0,7***

Ruch ciepła

Magazynowanie ciepła (akumulacja)

- Zmiana temperatury ciała związana jest ze strumieniem ciepła q_{mag}.
- Strumień ten można wyznaczyć jako pochodną energii cieplnej tego ciała: $$E = M \cdot c \cdot \Theta$$
- Jeżeli masa ***M*** oraz ciepło właściwe ***c*** są niezmienne w czasie, wówczas strumień akumulowany można modelować wzorem:

$$q_{mag} = \frac{d}{dt}\left(M \cdot c \cdot \Theta\right) = M \cdot c \cdot \frac{dq}{dt}$$

Ruch ciepła

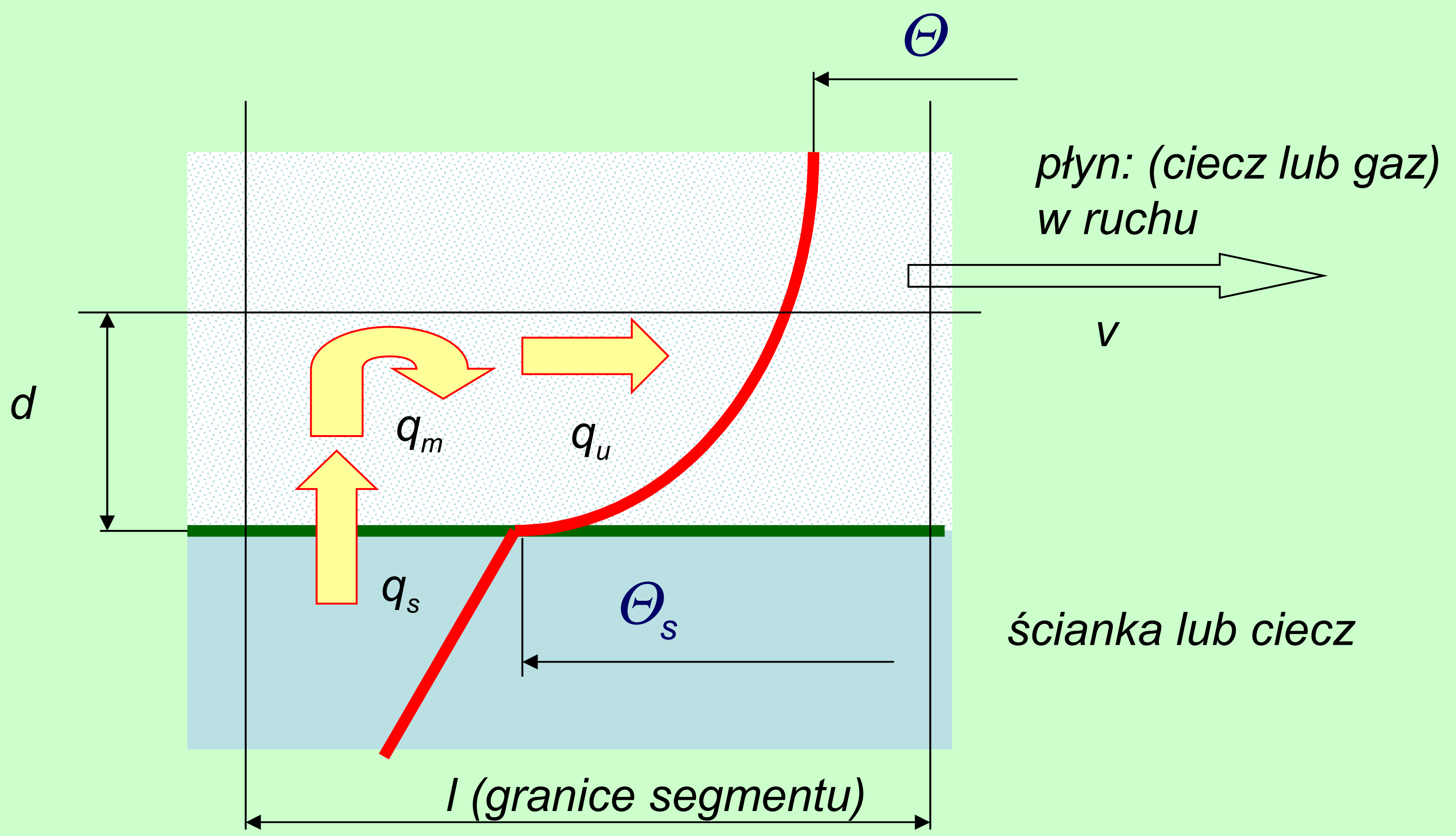
Przejmowanie ciepła między ścianką a strugą płynu

Założenia:

1. Płyn jest w ruchu w stosunku do ścianki (lub do innej sąsiedniej warstwy płynu).
2. Przepływ ciepła odbywa się w kierunku prostopadłym do ścianki.

Ruch ciepła

Przejmowanie ciepła między ścianką a strugą płynu



Ruch ciepła

Przejmowanie ciepła między ścianką a strugą płynu

Model fizyczny:

1. Zakładamy, że temperatura w ściance jest jednakowa w kierunku stycznym do ścianki, tzn. nie ma w ściance przepływu ciepła w kierunku stycznym do ścianki.
2. Poza warstwą przyścienną temperatura Θ w płynie w kierunku prostopadłym do ścianki jest jednakowa (pomijamy proces przewodzenia ciepła).
3. Jeżeli prędkość płynu w kierunku równoległym do ścianki jest duża (jak np. w wymiennikach ciepła z wymuszonym przepływem), to w bilansie strumienia ciepła można pominąć proces przewodzenia ciepła w płynie wzdłuż ścianki.

Ruch ciepła

<u>Przejmowanie ciepła między ścianką a strugą płynu</u>

- Przy tych założeniach można napisać następujące równanie bilansu strumieni:

$$q_s = q_m + q_u$$

gdzie:

- q_s – strumień ciepła wnikający od ścianki do płynu;
- q_m – strumień ciepła magazynowany w strudze płynu;
- q_u – strumień energii własnej płynu w segmencie *l* wywołany ruchem płynu (jest to jak gdyby strumień ciepła „wynoszony przez strugę” płynu).

Ruch ciepła

Przejmowanie ciepła między ścianką a strugą płynu

- Zjawisko **wnikania** ciepła od ścianki do płynu:

$$q_s = \alpha \cdot H \cdot l \cdot \left(\Theta_s - \Theta\right)$$

gdzie:

  - H – obwód strugi.

- Zjawisko **magazynowania** ciepła:

$$q_m = S \cdot l \cdot \rho \cdot c \cdot \frac{d\Theta}{dt}$$

gdzie:

  - S – pole przekroju poprzecznego strugi.

Ruch ciepła

Przejmowanie ciepła między ścianką a strugą płynu

- Zjawisko **unoszenia** ciepła przez strugę:
  - Strumień ciepła q_u jest stratą energii własnej strugi spowodowaną ruchem płynu.
  - Energia cieplna własna w płynie, w rozważanej objętości wynosi: $E = S \cdot l \cdot \rho \cdot c \cdot \Theta$
  - Zatem strumień unoszony na skutek ruchu wyrazi się zależnością:

$$q_u = \frac{dE}{dx} \cdot v = S \cdot l \cdot \rho \cdot c \cdot \frac{d\Theta}{dx} \cdot v$$